FATOR DE CORREÇÃO PARA ÁRVORES MARGINAIS EM MÉTODOS DE AMOSTRAGEM COM SELEÇÃO PROBABILÍSTICA PROPORCIONAL A UM TAMANHO

Sylvio Péllico Netto[1]

RESUMO - Nos métodos amostrais, onde as árvores são selecionadas com probabilidade proporcional a um tamanho - ppt, ocorrem árvores marginais, como no caso dos métodos de Bitterlich, de Prodan, de Strand e dos Quadrantes. Essas árvores são contadas como meias-árvores, incluindo-se uma meia área transversal, cujo valor é superestimado, dado seu raio marginal corbir uma área inferior àquela considerada na prática. Este trabalho apresenta o desenvolvimento teórico para corrigir a área transversal e os demais estimadores que dependem desta para outros cálculos posteriores.

PALAVRAS-CHAVE: Método amostral, árvores marginais, inventário florestal, fator de correção.

CORRECTION FACTOR FOR MARGINAL TREES IN SAMPLING METHODS WITH PROBABILISTIC SELECTION PROPORTIONAL TO A SIZE

ABSTRACTS - In sampling methods, for which trees are selected with a probability proportional to a certain size - pps, marginal trees occur as in the case of Bitterlich's, Prodan's, Strand's and Quadrant's methods. These trees are normally considered as half trees, half of the tree basal area, an overestimated value, due to the marginal radius covering a smaller area than that considered in the sampling. This paper presents a theoretical development of a correction factor for the tree basal area and other estimates which ar used for further calculations.

KEY-WORDS: Sampling method, marginal trees, forest inventory, correction factor.

INTRODUÇÃO

Em alguns métodos de amostragem, onde as árvores são selecionadas com probabilidade proporcional a um tamanho, como área basal: metodo de Biterlich; diâmetro: método de Strand para o cálculo de densidade e área basal; altura da árvore: método de Strand para volumetria e distância entre um ponto e uma árvore: método de Prodan e dos Quadrantes, as árvores marginais são contadas como meias-árvores, (Bitterlich,1948; Strand,1958; Prodan,1965). Muito embora se saiba que esta condição não é correta, mas sim uma aproximação, ela vem sendo utilizada normalmente na prática. O limite do círculo que passa pelo centro da árvore em questão, não a divide ao meio relativo à sua área transversal, mas abrange uma parte desta.

Como em todos esses métodos, as árvores amostradas são extrapoladas em sua área transversal para se obter as estimativas de área basal e volume por hectare, ocorre sempre uma superestimativa dessas variáveis, por unidade de área.

O objetivo deste trabalho é apresentar o desenvolvimento teórico do fator de correção a ser aplicado nos casos dessas árvores marginais, visando eliminar os erros de extrapolação das variáveis estimadas, quando se considera meias-árvores na amostragem.

DESENVOLVIMENTO DO FATOR DE CORREÇÃO

Seja considerada uma árvore marginal com área transversal "g", distante "R" de um ponto amostral "P", conforme está apresentado na Figura 1.

1 Departamento de Silvicultura e Manejo - UFPR - C.P. 2959 - 80.035-010 - Curitiba - PR.

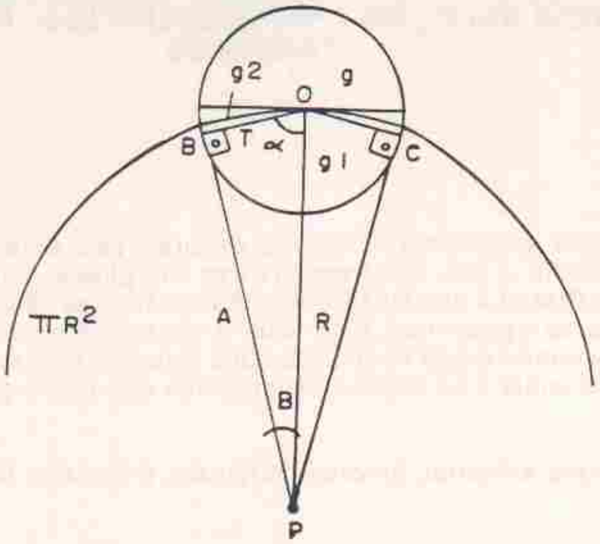

FIGURA 1. Ilustração esquemática para determinação das relações matemáticas na obtenção do fator de correção em árvores marginais.

Na Figura 1 tem-se:

r = raio da árvore marginal;

R = raio marginal ou distância do ponto amostral "P" ao centro da árvore "O";

α = ângulo interno formado pela confluência dos raios da árvore "r" e do marginal "R";

β = ângulo externo formado pelo raio marginal "R" e pela tangente de visada PB ou PC, denominada de "A";

g = área transversal da árvore;

g_1 = área transversal parcial circunscrita pelo ângulo 2 α;

g_2 = área transversal parcial circunscrita pela área marginal com raio "R" e subtraída da área g_1.

- **Relações matemáticas e trigonométricas para derivação do fator de correção**

Consideram-se inicialmente as áreas básicas afeitas à árvore marginal:

$g = \pi r^2$ = área transversal da árvore marginal ... (1)

$Q = \pi R^2$ = área marginal de inclusão da árvore no ponto amostral ... (2)

Baseando-se no teorema de Pitágoras tem-se:

$A^2 + r^2 = R^2$

e

$A^2 = R^2 - r^2$ ... (3)

Adicionalmente, usando-se o triângulo OPB ou OPC tem-se:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{A}{R} \qquad (4)$$

$$\text{Sen}^2\,\alpha = \frac{A^2}{R^2} \qquad (5)$$

$$A^2 = R^2\,\text{sen}^2\,\alpha\ ... \qquad (6)$$

Substituindo-se (6) em (3) tem-se:

$$R^2\,\text{sen}^2\,\alpha = R^2 - r^2$$

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{R^2 - r^2}{R^2}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \qquad (7)$$

Tomando-se o arco-seno da função (7) tem-se o valor do ângulo "α" em graus ou radianos, conforme o interesse, ou seja:

$$\alpha^{o} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}\right) \qquad (8)$$

O ângulo β pode igualmente ser obtido como segue:

$$\text{sen}\,\beta = \frac{r}{R} \qquad (9)$$

e

$$\beta^{o} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{r}{R}\right) \tag{10}$$

- **Obtenção da área**

As áreas de interesse estão separadas em duas partes, sendo a primeira, a formada pelo segmento circular circunscrito pelo ângulo BÔC, denominada de "g_1" e a segunda, pelo segmento circular complementar, que tem como raio "R" e passa pelo centro da árvore "O", denominado de "g_2", tal que $g_1 + g_2$ forma a parte da área transversal da árvore que está realmente circunscrita no círculo marginal, conforme mostrado na Figura 1.

- **Área "g_1"**

Tomando-se a área transversal da árvore "g", esta corresponde em seu total, a um giro angular de 360° tomado no centro da árvore. Como a área de interesse "g_1" está circunscrita pelo ângulo 2 α^{o}, então pode-se estabelecer uma proporcionalidade em relação à área transversal "g", conforme se pode depreender das derivações matemáticas sobre partes de círculo, contidas em Hudson (1961).

Se a função for equacionada para o ângulo α em graus tem-se:

$$g_1 = \frac{2\,\alpha^{o}\, g}{360^{o}} = \frac{\alpha^{o}\, g}{180^{o}} \tag{11}$$

Substituindo-se (1) e (8) em (11) tem-se

$$g_1 = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}\right) \frac{\pi r2}{180^{o}} \tag{12}$$

Se a função (11) for equacionada para o ângulo α em radianos tem-se:

$$g_1 = \frac{2\,\alpha\,\pi\, r^2}{2\,\pi} = \alpha\, r^2 \tag{13}$$

ou substituindo-se (8) em (13) tem-se:

$$g_1 = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}\right) r^2 \tag{14}$$

- **Área "g_2"**

Para se obter a área g_2, será necessário considerar o segmento circular da área de ocupação da árvore, tendo o centro em "P" e raio "R" como está apresentado na Figura 1.

A área transversal desta ocupação total, denominada de "Q", corresponde ao giro angular de 360° tomado no centro "P". Como a área de interesse "q" está circunscrita pelo ângulo 2 β^{o}, então pode-se estabelecer uma proporcionalidade em relação à área total ocupada "Q", conforme o contido em Hudson (1961).

Se a função for equacionada para o ângulo β em graus tem-se:

$$q = \frac{2\,\beta^{o}\,\pi\, R^2}{360^{o}} = \frac{\beta^{o}\,\pi\, R^2}{180^{o}} \tag{15}$$

Substituindo-se (10) em (15) tem-se

$$q = \frac{\left[\text{sen}^{-1} \left(\frac{r}{R}\right)\right] \pi\, R^2}{180^{o}} \tag{16}$$

Se a função for equacionada para o ângulo β em radianos tem-se:

$$q = \frac{2\beta^{o}\,\pi\, R^2}{2\,\pi} = \beta^{o}\, R^2 \tag{17}$$

Substituindo-se (10) em (17) tem-se:

$$q = \left[\text{sen}^{-1} \left(\frac{r}{R}\right)\right] R^2 \tag{18}$$

Considere, adicionalmente, o triângulo BOP, com ângulo reto em B, do qual já se obteve a relação (3). Portanto, a área dos dois triângulos formados pelo ângulo 2 β^{o} é dada por "T", ou seja:

$$T = \frac{2\, A\, r}{2} = A\, r \tag{19}$$

Substituindo-se "A" da relação (3) em (19) tem-se:

$$T = (\sqrt{R^2 - r^2})\,.\, r \tag{20}$$

Para se obter a área de interesse "g_2", basta subtrair a área dos triângulos "T" da área do segmento circular "q", ou

$$g_2 = q - T = [\text{sen-1}\left(\frac{r}{R}\right)] \frac{\pi\, R^2}{180^{o}} - (\sqrt{R^2 - r^2})\, r \tag{21}$$

quando os ângulos forem usados em graus, ou

$$g_2 = q - T = [\text{sen}^{-1} (\frac{r}{R})]\, R^2 - (\sqrt{R^2 - r^2})\, .\, r \quad (22)$$

quando os ângulos forem usados em radianos.

Finalmente, a área da árvore circunscrita no círculo marginal é dada por

$$g_1 + g_2 = [\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}\right)] . \frac{\pi r^2}{180^\circ} + [\text{sen}^{-1}(\frac{r}{R})] . \frac{\pi r^2}{180^\circ} \cdot \left(\sqrt{R^2 - r^2}\right) \cdot] \quad (23)$$

se os ângulos forem tomados em graus, ou

$$g_1 + g_2 = [\text{sen}^{-1} (\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R})] . r^2 + [\text{sen}^{-1} (\frac{r}{R})] . R^2 - (\sqrt{R^2 - r^2})\, .\, r\,] \quad (24)$$

se os ângulos forem tomados em radianos.

- **O fator de correção "K"**

O fator de correção "K" é obtido a partir de uma relação proporcional, tomada em função da metade da área transversal "g". Assim

$$\frac{\pi r^2}{2} \;\text{--------------------}\; \frac{1}{2}$$

$$g_1 + g_2 \;\text{--------------------}\; K$$

ou

$$K = \frac{(g_1 + g_2)\,\frac{1}{2}}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{g_1 + g_2}{\pi r^2} \quad (25)$$

Substituindo-se (23) em (25), tem-se finalmente o fator de correção a ser usado em qualquer árvore marginal.

$$K = \frac{[\text{sen}^{-1}(\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R})] \frac{\pi r^2}{180^\circ} + [\text{sen}^{-1}(\frac{r}{R})] \frac{\pi R^2}{180^\circ} - (\sqrt{R^2 - r^2})\, .\, r\;]}{\pi r^2} \quad (26)$$

se os ângulos forem tomados em graus, ou

$$K = \frac{[\text{sen}^{-1} (\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R})]\, r^2 + [\text{sen}^{-1} (\frac{r}{R})]\, R^2 - (\sqrt{R^2 - r^2})\, r]}{\pi r^2} \quad (27)$$

se os ângulos forem tomados em radianos.

APLICAÇÃO PRÁTICA

Supõe-se que uma árvore foi considerada marginal no método de Prodan ou no de Strand. Seu diâmetro médio foi de 40 cm e a distância do centro desta árvore ao ponto amostral foi de 20 metros. Neste caso r = 20 cm e R = 2.000 cm. Considerando-se os ângulos em graus, o valor de K é dado por

$$K = \frac{[\text{sen}^{-1} (\frac{\sqrt{2000^2 - 20^2}}{2000})] \frac{3{,}1416\,(20)^2}{180^\circ}}{3{,}1416\,(20)^2} + \frac{[\text{sen}^{-1} (\frac{20}{2000})] \frac{3{,}1416\,(2000)^2}{180^\circ} - (\sqrt{2000^2 - 20^2})\, 20}{3{,}1416\,(20)^2}$$

$$K = \frac{624{,}3185 + 40000{,}666 - 39998}{3{,}1416\,(20)^2}$$

$$K = \frac{626{,}9845}{1256{,}637} = 0{,}498938$$

Como se pode observar, o valor de K obtido é muito próximo de 0,5, porque, neste caso, a árvore está a 20 metros de distância do ponto amostral. Se, entretanto, esta árvore estiver a 2 metros do ponto amostral, distância mais comumente ocorrente então K, é reduzido para

$$K = \frac{[\text{sen}^{-1} (\frac{\sqrt{200^2 - 20^2}}{200})] \frac{3{,}1416\,(20)^2}{180^\circ}}{3{,}1416\,(20)^2} + \frac{[\text{sen}^{-1} (\frac{20}{200})] \frac{3{,}1416\,(200)^2}{180^\circ} - (\sqrt{200^2 - 20^2})\, 20}{3{,}1416\,(20)^2}$$

$$K = \frac{588{,}2516 + 4006{,}6968 - 3979{,}9497}{1256{,}637}$$

$$K = \frac{614{,}9986}{1256{,}637} = 0{,}4894$$

Neste caso, o valor de K obtido é 2,12% menor que o valor 0,5, normalmente considerado para as árvores marginais.

Este fator repercute igualmente na conversão de estimadores por ha, como área basal e volume.

CONCLUSÕES

a) O fator de correção para árvores foi desenvolvido neste trabalho e pode ser calculado usando operações em graus e radianos.

b) O fator de correção é inversamente proporcional à distância do ponto, ou da linha de amostragem até o centro da árvore marginal, ou seja, quanto mais próxima estiver a árvore marginal do ponto amostral, maior será o erro praticado quando esta é contada como meia árvore.

c) Árvores marginais, no caso dos métodos amostrais cujas árvores são selecionadas com probabilidade proporcional a um tamanho - PPT, especialmente nos casos do método de Prodan e dos Quadrantes, onde essas obrigatoriamente ocorrem, verifica-se que, por motivos da ausência da correção ora desenvolvida neste trabalho, os estimadores de área basal, de volumes e de densidade são superestimados.

d) Pelas ilustrações aplicativas apresentadas no trabalho, permite-se seja afirmado que a grandeza de erro nos estimadores, pode ser da ordem de até 3%, sempre a mais que o real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BITTERLICH, W. Die winkelzählprobe. **Allgemeine Forst und Holzwirtschaftliche Zeitung**, Wien, v.59, n.1/2, p.4-5, 1948.

HUDSON, R.G. **Manual do engenheiro**. Rio de Janeiro: Ao Livro técnico. 1961. 369p.

PRODAN, M. **Holzmesslehre**. Frankfurt: J.S. Sauerländer Verlag, 1965. 664p.

STRAND, L. 1958. Sampling for volume along a line. **Meddelelser fra Det norske Skogforsoksvesen**, Oslo, v.51, p.327-331, 1958.