

SAULO HENRIQUE WEBER

**Desenvolvimento de nova função densidade de probabilidade  
para avaliação de regeneração natural**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Florestal no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Julio Eduardo Arce  
Co-orientador: Prof. Dr. Sylvio Péllico Netto

CURITIBA  
2006

## SUMÁRIO

<b>1 - INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
JUSTIFICATIVAS.....	4
OBJETIVOS.....	4
Objetivo Geral.....	4
Objetivos Específicos.....	5
<b>2 - REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>6</b>
REGENERAÇÃO NATURAL.....	6
SASSAFRÁS.....	8
TÓPICOS DE MATEMÁTICA.....	8
Limites.....	10
Derivadas.....	11
Integrais.....	11
Integrais impróprias.....	12
MODELAGEM.....	12
TÓPICOS DE ESTATÍSTICA.....	14
DISTRIBUIÇÕES.....	16
PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS.....	18
PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS.....	19
DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL.....	20
DISTRIBUIÇÃO GAMMA.....	21
DISTRIBUIÇÃO BETA.....	22
DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL.....	25
DISTRIBUIÇÃO NORMAL OU DE GAUSS.....	27
<b>3 – METODOLOGIA.....</b>	<b>30</b>
LOCALIZAÇÃO DA ÁREA.....	30
COLETA DE DADOS.....	31
AJUSTE DOS MODELOS.....	33
MÉDIA E VARIÂNCIA DE UMA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE.....	34
EXPECTATIVA MATEMÁTICA.....	34
AVALIAÇÃO DO AJUSTE.....	34
COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO MÚLTIPLO.....	35

COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO MÚLTIPLO AJUSTADO.....	35
ERRO PADRÃO DA ESTIMATIVA RECALCULADO.....	35
KOLMOGOROV E SMIRNOV.....	36
QUI-QUADRADO ( $\chi^2$ ).....	36
ANÁLISE DE RESÍDUOS.....	36
DESVIO RELATIVO.....	37
<b>4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO - DESENVOLVIMENTO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE PROPOSTA.....</b>	<b>38</b>
CONDIÇÕES PARA QUE UMA FUNÇÃO SEJA CONSIDERADA UMA FDP.....	42
MÉDIA ARITMÉTICA.....	43
VARIÂNCIA.....	43
MODA.....	44
PONTOS DE INFLEXÃO.....	44
CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DA FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE.....	46
TENDÊNCIA DO MODELO DESENVOLVIDO A NORMALIDADE.....	46
FORMAS QUE A FUNÇÃO PODE ASSUMIR.....	47
<b>5 - SÍNTESE DO MODELO PROPOSTO.....</b>	<b>54</b>
<b>6 - APLICAÇÃO/VERIFICAÇÃO.....</b>	<b>55</b>
NORMAL.....	56
WEIBULL.....	56
GAMMA.....	56
BETA.....	56
EXPONENCIAL.....	56
MODELO PROPOSTO.....	56
<b>7 – CONCLUSÕES.....</b>	<b>60</b>
<b>8 - REFERÊNCIAS.....</b>	<b>62</b>
<b>ANEXO 1 – Linhas de comando para o desenvolvimento da Função densidade de probabilidade.....</b>	<b>66</b>
FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE.....	66
Função.....	66
Propriedades da função.....	66

Função probabilística.....	66
<b>ANEXO 2 – Linhas de comando para a obtenção das expressões que estimam a média, variância e desvio padrão.....</b>	<b>69</b>
Expectativa Matemática.....	69
Média.....	70
Variância.....	71
Desvio padrão.....	71
<b>ANEXO 3 – Linhas de comando para a obtenção das expressões que estimam a moda e os pontos de inflexão.....</b>	<b>72</b>
Função.....	72
Moda.....	72
Pontos de inflexão.....	72
<b>ANEXO 4 – Procedimentos para a obtenção dos coeficientes, utilizando-se o software Table curve 2d.....</b>	<b>74</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO DA ÁREA DEFINIDA ENTRE A CURVA E O EIXO .....	12
FIGURA 02 – REPRESENTAÇÃO DA ÁREA SOB A CURVA DAS ABCISSAS.....	17
FIGURA 03 – DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL, QUANDO $\beta = 1$ .....	20
FIGURA 04 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DISTRIBUIÇÃO GAMMA, PARA $a = 1$ (SÓLIDO), $a = 1,5$ (PONTOS), $a = 2$ (TRAÇOS) E $a = 3$ (PONTOS E TRAÇOS) E $b = 0,5$ .....	22
FIGURA 05 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DISTRIBUIÇÃO BETA, PARA $a = 1$ E $b = 2$ (SÓLIDO), $a = 2$ E $b = 1$ (PONTOS) E $a = 1$ E $b = 1$ (TRAÇOS).....	23
FIGURA 06 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DISTRIBUIÇÃO BETA, PARA $a = 0,3$ E $b = 0,8$ (SÓLIDO) E $a = 0,3$ E $b = 0,3$ (PONTOS).....	24
FIGURA 07 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DISTRIBUIÇÃO BETA, PARA $a = 2$ E $b = 3$ (SÓLIDO), $a = 5$ E $b = 3$ (PONTOS) E $a = 2$ E $b = 2$ (TRAÇOS).....	24
FIGURA 08 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DISTRIBUIÇÃO BETA, PARA $a = 0,5$ E $b = 1,5$ (SÓLIDO) E $a = 3$ E $b = 0,5$ (PONTOS).....	25
FIGURA 09 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL, COM $a = 1$ , $b = 10$ e $c = 0,7$ (SÓLIDO), COM $a = 1$ , $b = 10$ e $c = 1$ (PONTOS), COM $a = 1$ , $b = 10$ e $c = 2$ (TRAÇOS), COM $a = 1$ , $b = 10$ e $c = 3,6$ (PONTOS E TRAÇOS).....	26
FIGURA 10 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL, $\sigma = 1$ E $\mu = 0$ .....	27
FIGURA 11 – LOCALIZAÇÃO DA FAZENDA EXPERIMENTAL GRALHA AZUL.....	30
FIGURA 12 – MAPA DA ÁREA DA UNIDADE EXPERIMENTAL.....	31
FIGURA 13 - REPRESENTAÇÃO DAS PARCELAS PERMANENTES.....	32
FIGURA 14 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA EQUAÇÃO 27 AJUSTADO AOS DADOS DE ALTURA DE REGENERAÇÃO NATURAL DE SASSAFRÁS.....	38
FIGURA 15 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA EQUAÇÃO 28 AJUSTADO AOS DADOS DE ALTURA DE REGENERAÇÃO NATURAL DE SASSAFRÁS.....	39
FIGURA 16 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA EQUAÇÃO 29 AJUSTADO AOS DADOS DE ALTURA DE REGENERAÇÃO NATURAL DE SASSAFRÁS.....	40
FIGURA 17 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA EQUAÇÃO 30 AJUSTADO AOS DADOS DE ALTURA DE REGENERAÇÃO NATURAL DE SASSAFRÁS.....	40
FIGURA 18 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA EQUAÇÃO 31 AJUSTADO AOS DADOS DE ALTURA DE REGENERAÇÃO NATURAL DE SASSAFRÁS.....	41

FIGURA 19 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MODELO PROPOSTO, VARIANDO-SE OS COEFICIENTES, DE ACORDO COM AS CONCLUSÕES DO ESTUDO SOBRE OS PONTOS DE INFLEXÃO.....	45
FIGURA 20 – REPRESENTAÇÃO TRIDIMENSIONAL DAS FORMAS GRÁFICAS ASSUMIDAS PELO MODELO PROPOSTO.....	48
FIGURA 21 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MODELO PROPOSTO, EM QUE OS COEFICIENTES SÃO ARBITRARIAMENTE CONSIDERADOS IGUAIS.....	48
FIGURA 22 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MODELO PROPOSTO, COM $a$ , $c$ E $d$ FIXOS E VARIANDO $b$ .....	49
FIGURA 23 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MODELO PROPOSTO COM $a$ , $b$ , e $d$ FIXOS E VARIANDO $c$ .....	50
FIGURA 24 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MODELO PROPOSTO, COM $b$ , $c$ E $d$ FIXOS E VARIANDO $a$ .....	51
FIGURA 25 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MODELO PROPOSTO, COM $a$ , $b$ E $c$ FIXOS E VARIANDO $d$ .....	52
FIGURA 26 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES CLÁSSICAS E A DESENVOLVIDA NESTE TRABALHO AJUSTADAS AOS DADOS DE REGENERAÇÃO NATURAL DE SASSAFRÁS E AS RESPECTIVAS FREQUÊNCIAS OBSERVADAS .....	57
FIGURA 27 – RESÍDUOS EM PORCENTAGEM DAS FUNÇÕES CLÁSSICAS E A DESENVOLVIDA NESTE TRABALHO AJUSTADAS AOS DADOS DE REGENERAÇÃO NATURAL DE SASSAFRÁS.....	58

## LISTA DE EQUAÇÕES

EQUAÇÃO 01.....	20
EQUAÇÃO 02.....	21
EQUAÇÃO 03.....	21
EQUAÇÃO 04.....	21
EQUAÇÃO 05.....	22
EQUAÇÃO 06.....	22
EQUAÇÃO 07.....	22
EQUAÇÃO 08.....	25
EQUAÇÃO 09.....	25
EQUAÇÃO 10.....	25
EQUAÇÃO 11.....	26
EQUAÇÃO 12.....	26
EQUAÇÃO 13.....	26
EQUAÇÃO 14.....	27
EQUAÇÃO 15.....	27
EQUAÇÃO 16.....	27
EQUAÇÃO 17.....	34
EQUAÇÃO 18.....	34
EQUAÇÃO 19.....	35
EQUAÇÃO 20.....	35
EQUAÇÃO 21.....	35
EQUAÇÃO 22.....	35
EQUAÇÃO 23.....	36
EQUAÇÃO 24.....	36
EQUAÇÃO 25.....	36
EQUAÇÃO 26.....	36
EQUAÇÃO 27.....	37
EQUAÇÃO 28.....	38
EQUAÇÃO 29.....	38
EQUAÇÃO 30.....	39
EQUAÇÃO 31.....	40
EQUAÇÃO 32.....	41

EQUAÇÃO 33.....	42
EQUAÇÃO 34.....	43
EQUAÇÃO 35.....	43
EQUAÇÃO 36.....	44
EQUAÇÃO 37.....	44
EQUAÇÃO 38.....	56
EQUAÇÃO 39.....	56
EQUAÇÃO 40.....	56
EQUAÇÃO 41.....	56
EQUAÇÃO 42.....	56
EQUAÇÃO 43.....	56

## LISTA DE TABELAS

TABELA 01 – DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS DA ALTURA DA REGENERAÇÃO NATURAL DE SASSAFRÁS.....	55
TABELA 02 – COEFICIENTES AJUSTADOS.....	55
TABELA 03 – MÉDIA, DESVIO PADRÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO.....	59
TABELA 04 – TESTES DE ADERÊNCIA E COMPARAÇÃO ENTRE FUNÇÕES.....	59

## RESUMO

Ao pesquisar diversas espécies arbóreas contidas nos fragmentos de floresta nativa remanescentes na Fazenda Experimental Gralha Azul da Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR, localizada no município de Fazenda Rio Grande, PR, verificou-se que as distribuições probabilísticas aplicadas atualmente não são suficientemente flexíveis para representar a frequência de sobreviventes da regeneração natural. A partir da análise dos dados coletados, verificou-se que a quantidade de sementes que germinam no interior da floresta é grande, porém, a porcentagem de plantas que se tornam adultas (DAP maior que 10 cm), em relação à quantidade de sementes que germinam, é relativamente baixa. Essa situação não é bem representada por nenhuma das distribuições clássicas, como a Normal, a Weibull, a Gamma, a Beta e a Exponencial, que são comumente utilizadas para esses casos. Fundamenta-se este trabalho na identificação de um modelo matemático que atenda às seguintes condições: ser suficientemente flexível para representar a distribuição de frequências das alturas de regeneração natural de espécies nativas; e que possa ser convertida em uma função densidade de probabilidade, atendendo às características e propriedades atinentes a ela. Este trabalho teve como objetivo principal testar modelos matemáticos, que foram ajustados por meio de regressão não linear, segundo o procedimento de Marquadt, pelo método de mínimos quadrados e com múltiplas iterações. A característica principal dessa função é a flexibilidade para representar a grande quantidade de indivíduos contidos na primeira classe, seguido de um decréscimo abrupto nas classes subsequentes. Esse modelo resultou em um melhor ajuste à distribuição de alturas de regeneração natural, em comparação com os modelos clássicos. Foram desenvolvidas as fórmulas para estimar os parâmetros média, variância e moda, bem como para a obtenção dos pontos de inflexão do modelo. As formas que a função pode assumir foram simuladas de acordo com a variação dos coeficientes. A primeira parte do presente trabalho consistiu em revisar a literatura pertinente para aprofundar conhecimentos sobre as distribuições clássicas utilizadas para avaliar mortalidade de regeneração natural. A seguir, manipulando dados de regeneração natural de *Sassafrás* (*Ocotea odorifera* (Vell.) Rowher), encontrou-se que os modelos probabilísticos clássicos (Normal, Weibull, Gamma, Beta e Exponencial) não resultaram em um bom ajuste a esses dados. Em um terceiro momento, foi tentado conseguir novas alternativas para resolver este problema, buscando várias possibilidades aplicativas de outras funções matemáticas que pudessem representar bem a dispersão de dados. Após definido o novo modelo procedeu-se às operações para adequá-lo aos requisitos de uma Função Densidade de Probabilidade (FDP). O quinto passo foi derivar as fórmulas para calcular a média e a variância, usando-se o método de expectativa matemática. Na sequência, foram derivadas as fórmulas para a obtenção da moda e dos pontos de inflexão, bem como foram simuladas as formas das curvas, usando-se variações dos coeficientes da função. Finalmente, os resultados das funções clássicas ajustadas e os do modelo proposto na presente pesquisa foram comparados, usando-se os testes de aderência. O modelo proposto no presente trabalho mostrou-se ser suficientemente flexível para o ajuste aos dados de altura da regeneração natural do *Sassafrás*. A distribuição proposta resultou em alto valor do coeficiente de determinação múltiplo ajustado e menores desvios relativos. De acordo com o teste de  $\chi^2$  e de Kolmogorov-Smirnov nenhum modelo foi aderente aos dados, entretanto, pode-se observar que o modelo proposto foi o que mais se aproximou à série de dados observados (0,03 e 0,07, valor de  $D_{tab(0,05)}$  e  $D_{calc}$  de Kolmogorov-Smirnov, respectivamente). A média aritmética, o desvio padrão e a moda, calculados usando as fórmulas derivadas do

modelo proposto, resultaram em 2,29 m, 2,71 m e 0,8 m, respectivamente, os quais tiveram muito boas aproximações com os valores estimados da amostra (2,29 m, 2,66 m e 1,04 m).

**Palavras-chave:** Distribuições Probabilísticas Assimétricas; Regressão Não Linear; Florestas Naturais; Mortalidade; Regeneração Natural.

## ABSTRACT

### Development of a new probability density function to evaluate natural regeneration

Doing a research in remaining fragments of the Araucaria Forest in the Gralha Azul Experimental Farm of the Pontifical Catholic University of Parana – PUCPR, located at the municipality of Fazenda Rio Grande, PR, it was observed various forest species, where it was verified that the probability distributions currently used does not satisfy the flexibility required to well represent the frequency of natural regeneration survivors. From an analysis of data collected, it was verified that the amount of germinated seeds was high, however, the percentage of these plants that became mature (DBH bigger than 10 cm), in relation to the amount of germinated seeds, was relatively low. This situation is not represented satisfactorily by any of the classic probabilistic distributions as Normal, Weibull, Gamma, Beta and Exponential, which are commonly used for these cases. This work was based on the necessity of identifying a mathematical model that includes the following conditions: presents enough flexibility to represent the frequency distribution of natural regeneration; and that can be converted into a probability density function, considering its characteristics and properties. This work had as main objective to test mathematical models that was adjusted by means of non-linear regression, Marquadt procedure, by the least squares method, with multiple iterations. The main characteristic of this function was to attain enough flexibility to represent the great amount of individuals in the first class, followed by an abrupt decrease in the following classes. This model resulted in a better adjustment for the variable height of natural regeneration data, in comparison to the application of the classical models. The frequency distribution was better represented by the proposed model in this work and resulted in good approximation of the estimated mean and variance values. The expressions were developed to calculate these parameters, as well as those to calculate the mode and the inflection points. The shapes that the function can assume were simulated in accordance with the parameters variations. The first part of the present work consisted of literature revision to be acquainted with the application of the classical distributions to evaluate mortality of natural regeneration. After manipulating natural regeneration data of Sassafras (*Ocotea odorifera* (Vell.) Rowher), it was verified that the classical probabilistic functions (Normal, Weibull, Gamma, Beta and Exponential) did not well adjusted to mortality and survival distribution data, because the shape of the observed data required a better flexibility of the mathematical model. At the third moment, it was tried to get new alternatives to solve this problem, by searching various possible applications of other mathematical functions that could well represent the data dispersion. After defined the new proposed model, it was proceeded operations to adequate it to the requirements of a Probability Density Function (PDF). The fifth step was to derive the formulas to calculate the mean and the variance, using the method of mathematical expectation. After, the mode and the inflection points formulas were derived, as well as the shape curves was simulated, using variation of the parameters values. Finally, the results of the adjusted classical functions and the proposed in the present research were compared by means of goodness of fit tests. The model proposed in this research work showed to be enough flexible for the adjustment of Sassafras natural regeneration height data. The proposed distribution resulted in a high adjusted multiple determination coefficient and lesser relative deviations. All models was no-adherent to the data, according to the  $\chi^2$  and Kolmogorov-Smirnov tests, however it can be observed that the proposed distribution resulted in the nearest

values to the observed data ( $0.03 \leq 0.07$ ,  $D_{tab(0,05)}$  and  $D_{calc}$  values of Kolmogorov-Smirnov test, respectively). The mean, the standard deviation and the mode calculated by the formulas derived from the proposed distribution model resulted in 2.29 m, 2.71 m and 0,8m, respectively, which had very good approximation with the estimated sample values (2.29 m, 2.66 m and 1,04m).

**Keywords:** Asymmetrical Probabilistic distributions; Non-linear Regression; Nature Forests; Mortality; Natural Regeneration.